

Le funzioni

Francesco Parisio

1 Generalità

Siamo interessati a formalizzare, in termini matematici, il concetto di *legame* tra due quantità numeriche. Per citarvi qualche esempio, abbiamo studiato a pieno alcune figure sul piano cartesiano (e.g. parabole, rette, iperoli), ma non abbiamo mai parlato della teoria che ci permette di lavorare con questi luoghi più facilmente.

Iniziamo definendo il concetto di **relazione**, il legame più debole che conosciamo e che possiamo definire in modo molto semplice. Procuriamoci intanto due insiemi S e T .

Definizione 1: Relazione

Una relazione $\mathcal{R}$ è un sottoinsieme di coppie di elementi in S e T

$$\mathcal{R} \subseteq \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$$

Possiamo visualizzare le relazioni, così come le funzioni, su un piano cartesiano, indicando su di un asse gli elementi dell'insieme S , e sull'altro quelli dell'insieme T . Potremo disegnare un punto se il punto del piano cartesiano compare nella relazione $\mathcal{R}$. Ad esempio,

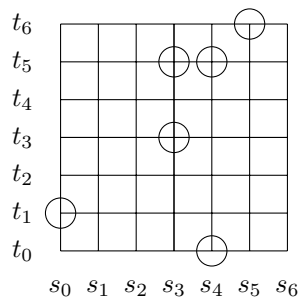


Grafico di una relazione tra S e T

Vediamo subito che nell'esempio l'elemento $s_4 \in S$ è in relazione con t_0 e con t_5 , entrambi in T . In base allo scopo che ci poniamo, questo può andarci bene. Tuttavia, se vogliamo descrivere il cambiamento di una quantità rispetto ad un'altra, non ci è utile questa informazione. Immaginate, per esempio, che l'insieme S sia l'insieme degli oggetti in vendita in un negozio, e T i prezzi di tutti gli oggetti in vendita. Osserviamo che associare allo stesso oggetto più prezzi non è certo una buona idea!

Il tipo di relazione che abbiamo descritto si chiama *funzione*. Eccone la definizione più rigorosa.

Definizione 2: Funzione

Una funzione f da un insieme S all'insieme T

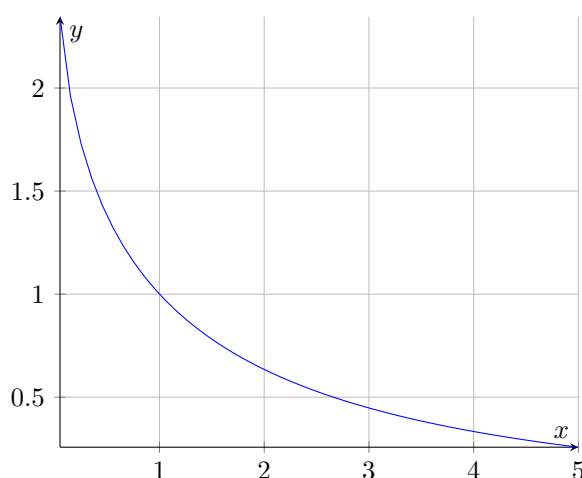
$$f : S \rightarrow T$$

è una relazione dove, per ogni elemento di S è associato **un unico** (oppure uno, ed un solo) elemento dell'insieme T . In formule, f è funzione se

$$\forall s \in S \quad \exists! t : f(s) = t$$

L'insieme S si chiama dominio, mentre l'insieme T si chiama codominio.

È importante osservare che il simbolo $f(s)$ ha senso, perché l'elemento associato a s da f è unico. Un esempio di funzione,



Il nostro studio si limiterà allo studio di quantità numeriche, e in particolare reali (nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$). La matematica studia in generale insiemi di diverso tipo, ma questo risulta sufficientemente interessante.

Procuriamoci una funzione, e studiamone il dominio.

Esempio 1

Sia $f(x) = x^2 + 1$. Il dominio di questa funzione è tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Infatti, l'operazione di potenza non ha problemi di definizioni, né tanto meno la somma con un numero intero.

Esempio 2

Consideriamo invece $f(x) = \sqrt{x-1}$. Sappiamo bene che la funzione di radice quadrata non è definita per i valori del suo argomento negativi. Dunque, perché sia ben definita, dobbiamo richiedere che la variabile x sia tale che $x-1 \geq 0$, che è vero soltanto quando $x \geq 1$. Il dominio

della funzione f è perciò

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

Quale sia la notazione che preferite per indicare gli intervalli non ha importanza, l'importante è che la soluzione finale sia giusta!

2 Immagine e controimmagine

Torniamo per un attimo all'esempio del negozio. Può essere utile fornire una lista dei prezzi di un insieme di oggetti in vendita, oppure sapere quali oggetti hanno un certo prezzo. Il capo svolge il ruolo di funzione, cioè assegna ad ogni oggetto un solo prezzo. In termini più generali, i matematici chiamano *immagine* il prezzo di un oggetto, e chiamano la *controimmagine* (o retroimmagine) di un prezzo gli oggetti che hanno un certo prezzo.

Formalizzando,

Definizione 3: Immagine di un elemento

Sia

$$f : S \rightarrow T$$

una funzione da S a T . Consideriamo $s \in S$ un elemento di S . L'immagine di s tramite f è l'unico elemento $f(s)$ che appartiene a T associato a s tramite f .

Questa definizione non è molto utile, perché abbiamo soltanto dato il nome ad il simbolo $f(s)$.

Definizione 4: Immagine di un sottoinsieme

Sia

$$f : S \rightarrow T$$

una funzione da S a T . Consideriamo, $J \subset S$ un sottoinsieme di S . Allora l'insieme

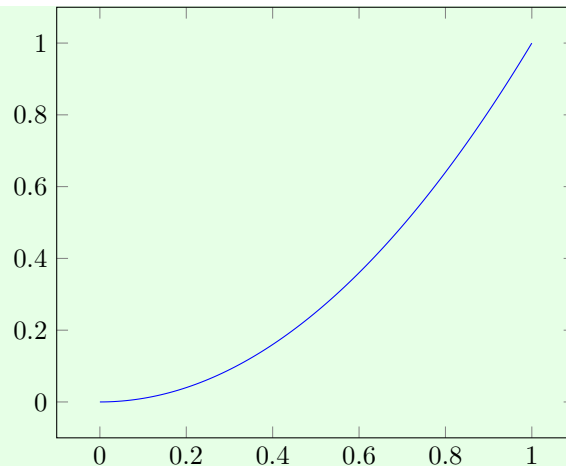
$$f(J) = \{f(j) \in T \mid j \in J\}$$

si chiama **immagine di J** tramite f .

Prendiamoci un attimo di tempo per digerire questa definizione, e portiamo qualche esempio. Il nostro obiettivo era formalizzare il concetto di "legame" tra più quantità: questa definizione ci aiuta a comprendere come alcune quantità di S sono legate all'insieme di arrivo T . Prendiamo un esempio concreto.

Esempio 3

Studiamo l'immagine dell'intervallo $[0, 1]$ tramite la funzione $f(x) = x^2$ nei numeri interi. Senza preoccuparci di cosa esattamente voglia dire per il momento, sappiamo dall'esperienza che il quadrato è una funzione crescente: se l'argomento è più grande, allora anche il quadrato è più grande (e.g. 3 è maggiore di 2, e infatti 9 è maggiore di 4).



Con l'aiuto di questa osservazione, e con l'aiuto del grafico in figura, possiamo concludere che l'immagine della funzione è uguale a $[0, 1]$. Accontentiamoci, per il momento, di questa dimostrazione.

Sarà compito del prossimo capitolo quello di definire cosa vuol dire "funzione crescente" o "decrescente". Per adesso, concludiamo, dando la definizione di "controimmagine".

Definizione 5: Controimmagine di un insieme

Per la funzione $f : S \rightarrow T$, la controimmagine di un sottoinsieme di T , $K \subset T$ è l'insieme

$$f^{-1}(K) = \{s \in S \mid f(s) \in K\}$$

di tutti gli elementi di s che vengono spediti tramite f nell'insieme K .

Si è dato il nome di controimmagine, poiché assomiglia all'operazione inversa dell'immagine di un insieme. Consideriamo l'esempio precedente. Si era concluso che l'immagine dell'intervallo $[0, 1]$ era proprio l'intervallo $[0, 1]$. In formule,

$$f([0, 1]) = [0, 1]$$

Possiamo altrettanto concludere che l'insieme degli elementi che vengono spediti in $[0, 1]$ tramite f è l'insieme $f^{-1}([0, 1]) = [0, 1]$, cioè la retroimmagine di tale intervallo.

Accenno solo al fatto che in matematica viene indicata con $f^{-1}(\cdot)$ anche la **funzione inversa**, che può creare ambiguità. In alcuni settori, viene utilizzato il simbolo $f^{-1}[\cdot]$ per indicare la retroimmagine di un insieme, in modo da meglio distinguere i due concetti profondamente diversi.

3 Funzioni crescenti e decrescenti

Formalizzeremo, adesso, l'idea di funzione crescente o decrescente. Potremo osservare questo fenomeno qualitativamente sul piano cartesiano come un alzarsi o un abbassarsi della quota (altezza) del grafico dall'asse delle x .

Preoccupiamoci, adesso, soltanto di funzioni numeriche, ed in particolare, funzioni di variabile reale. Questa restrizione è *necessaria*, perché le parole "crescente" o "decrescente" necessitano di una definizione

di un *ordine* da dare agli elementi di un insieme. Dalle scuole elementari, sappiamo quando un numero è maggiore o minore di un altro, ma non potremo dire lo stesso sull'insieme dei triangoli del piano o l'insieme delle molecole che compongono l'aria. Per fare questo, sta a noi stabilire un ordine più o meno immediato per dire "questo triangolo è maggiore di quello", oppure "questa molecola è minore o uguale di quella".

Approfondimento

Prendendo il caso dell'insieme dei triangoli sul piano cartesiano (chiamiamolo $\mathbf{T}$ ad esempio), ci sono molte qualità che un triangolo ha, per le quali possiamo definire un ordine. Ad esempio, possiamo dire che il triangolo T_1 è maggiore del triangolo T_2 se il perimetro $P(T_1) > P(T_2)$ (osservate che il perimetro P è una funzione!). Sappiamo cosa vuol dire che due numeri sono maggiori, quindi ci siamo ricondotti a una qualità di ordine che già conosciamo.

Vengono chiamate così le relazioni di ordine, cioè relazioni, appunto, che guarniscono un insieme di un ordine. Non fanno parte del nostro percorso di studio, quindi le mettiamo da parte, magari per un approfondimento futuro.

Dopo questa lunga ma doverosa parentesi, definiamo cosa vuol dire che una funzione è crescente in un sottoinsieme del dominio.

Definizione 6

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione numerica con valori reali. Allora, preso un sottoinsieme $H \subset D$ del dominio, diciamo che la funzione è **crescente** in H se

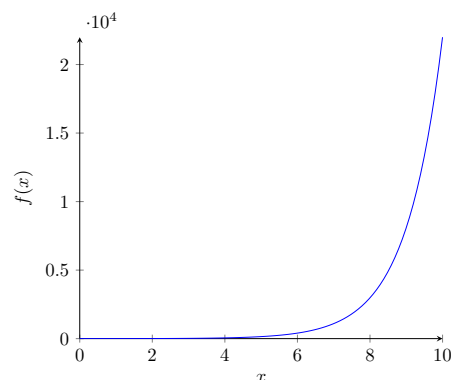
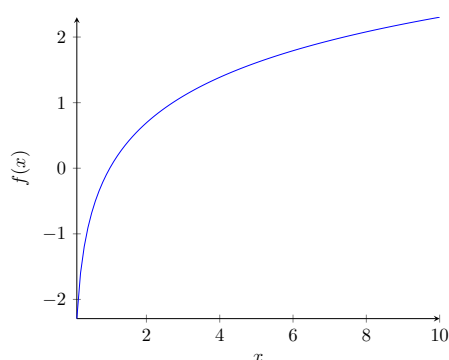
$$\forall x, y \in H : x < y, f(x) < f(y)$$

cioè se, presi comunque due punti in H , il primo maggiore del secondo, è vero che l'immagine del primo è maggiore del secondo.

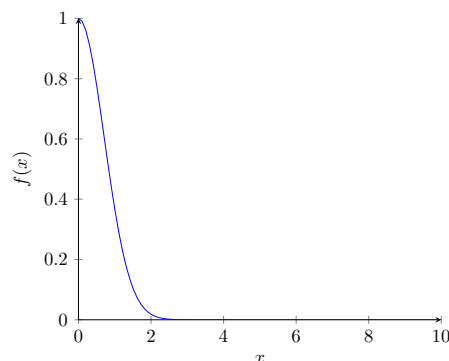
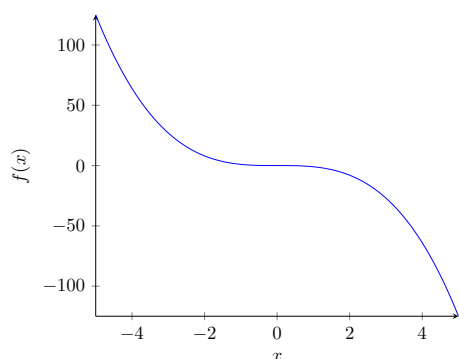
Viceversa, diciamo che è **decrescente**, se comunque presi due punti in H , il primo maggiore del secondo, è vero che l'immagine del primo è minore del secondo.

Come esercizio, scrivete voi la formula matematica che descrive la decrescenza nell'insieme H . Se accettate suggerimenti, basta cambiare un simbolo!

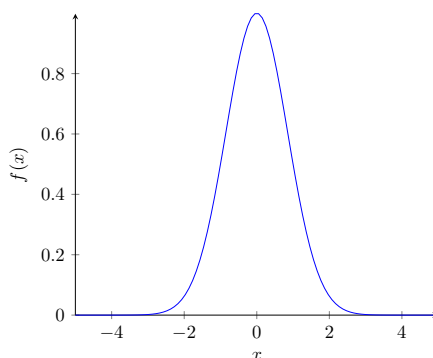
Intuitivamente, il grafico di una funzione crescente "sale" al crescere della variabile; viceversa, scende per quelle decrescenti. Eccone qualche esempio.



Entrambe le funzioni sono crescenti, poiché entrambe salgono. Non si può dire lo stesso delle seguenti, che sono decrescenti.



Esistono funzioni né crescenti né decrescenti, come ad esempio,



La funzione che ho considerato è un particolare tipo di esponenziale, che studieremo successivamente. Per il momento, dobbiamo accorgerci che questa funzione, *in tutto l'intervallo* $[-4, 4]$ non è né crescente né decrescente. Possiamo dire qualcosa se dividiamo in casi ed esaminiamo la funzione nei sottointervalli $[-4, 0]$ e $[0, 4]$. Allora la funzione è crescente nel primo e decrescente nel secondo. Diremo che questa funzione, in $[-4, 4]$ non è monotona.

Definizione 7: Funzione monotona

Quando una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente o decrescente in $J \subset D$ diciamo che è monotona. Se f non è né crescente né decrescente in J , diremo che non è monotona in J .

Consideriamo un caso concreto.

Esempio 4: Monotonia di $f(x) = x^2$

Studiamo la funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f : x \mapsto x^2$. È la funzione "quadrato" che conosciamo bene. Vogliamo dimostrare che sia crescente in tutta la sua immagine. Per fare ciò, procuriamoci due numeri $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$. Allora possiamo moltiplicare per x_1 ambo i membri della disequazione: questa rimane vera, in quanto x_1 è positivo. Seguiamo i

passaggi:

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \\ \implies f(x_1) = x_1^2 &< x_1 x_2 \\ &< x_2^2 = f(x_2)\end{aligned}$$

Abbiamo esattamente la definizione di funzione crescente in $[0, +\infty)$, quindi la tesi.

Esempio 5

Studiamo la funzione

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f &: x \mapsto -x^3\end{aligned}$$

è decrescente su $\mathbb{R}$. Come prima, siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 < x_2$. Allora otteniamo

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \\ \implies -x_1 &> -x_2 \\ \implies f(x_1) = -x_1^3 &= -x_1^1 x_1^1 > -x_2 x_2 x_2 = -x_2^3 = f(x_2)\end{aligned}$$

che è esattamente la definizione di funzione decrescente.

Mettiamo tutto insieme con un esercizio più difficile.

Esempio 6

Consideriamo $J = [0, 5]$ un intervallo della retta $\mathbb{R}$. Trovare l'immagine R di J tramite la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

. Dire se la funzione f è crescente, decrescente, o non monotona su R .

Prima di tutto, analizziamo il comportamento della funzione sull'intervallo J . Dunque, siano $a, b \in \mathbb{R}$ due punti tali che $a < b$. Si ottiene subito che

$$\begin{aligned}a &< b \\ \implies \frac{1}{a} &> \frac{1}{b} \\ \iff \frac{1}{a+1} &> \frac{1}{b+1} \\ \iff f(a) &> f(b)\end{aligned}$$

Questo ci dice che f è decrescente su J . Allora, raggiunge il suo valore massimo al punto 0 e il suo valore minimo in 5. L'immagine R sono tutti i valori che la funzione assume in tale insieme, cioè

$$f(R) = [f(6), f(0)]$$

cioè

$$f(R) = \left[\frac{1}{6}, 1\right] \subset [0, 5]$$

Siccome l'immagine $f(R) \subset [0, 5]$ è ancora contenuta in $[0, 5]$, è chiaro che la funzione sia decrescente anche su R .

4 Funzioni iniettive, suriettive e bigettive

Entriamo ora in un argomento più difficile e meno intuitivo che richiede una particolare attenzione. Alcune caratteristiche delle funzioni vengono descritte dalle definizioni di iniettività e suriettività. Queste appartengono in genere a tipi di funzioni generali, ma noi le studieremo solo nel caso di domini e codomini reali. Iniziamo con le solite definizioni.

Definizione 8: Funzione iniettiva

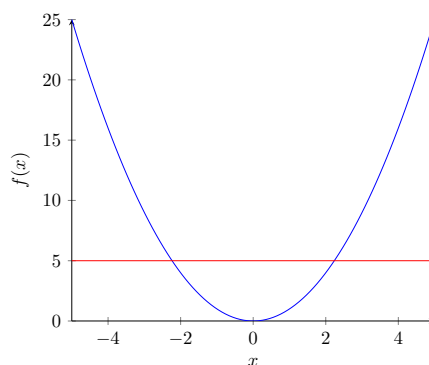
Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

oppure, equivalentemente

$$\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Questa definizione vuol dire che se le valutazioni di due numeri reali sono uguali, allora necessariamente i due punti presi sono uguali. Graficamente, questo si può interpretare così: immaginiamo di far scorrere liberamente una retta parallela all'asse x (che ricordiamo essere della forma $\{y = \alpha\}$ per un certo α reale) lungo il grafico della funzione. La definizione ci dice che questa retta non può incrociare (o meglio, intersecare) più di una volta il grafico: se questo succede, sappiamo per certo che la funzione non è iniettiva. Una figura:



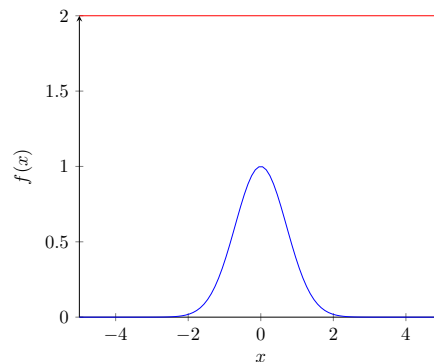
La retta rossa ci notifica subito che questa funzione, il cui grafico è una parabola, non è iniettiva. La storia per le funzioni suriettive non cambia molto:

Definizione 9: Funzioni suriettive

Una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice suriettiva se

$$\forall y \in C \exists x \in D : f(x) = y$$

In altre parole, la retta rossa di cui abbiamo parlato nel paragrafo sopra deve intersecare il grafico **almeno** una volta.



In questo caso, la retta rossa ci dice che la funzione non è suriettiva, perché non assume mai immagine 2, ad esempio.

Bisogna porre attenzione a un dettaglio che solo il lettore più attento avrà notato: il codominio, nella definizione di suriettività, non è $\mathbb{R}$. Il motivo di questa scelta è semplice: se scegliamo un codominio più piccolo per funzioni che sappiamo non essere suriettive, la funzione diventa per definizione suriettiva!

Approfondimento

Formalmente, le due funzioni, la prima con codominio $\mathbb{R}$ e la seconda con codominio $f(D)$ sono diverse: quando si parla di composizioni di funzioni, le cose cambiano molto, e bisogna stare attenti. La funzione generica con codominio reale non è sempre suriettiva, ma qualsiasi funzione con codominio la sua immagine lo è. In particolare **se il codominio della funzione coincide con la sua immagine, la funzione è certamente suriettiva.**

Trattiamo allora di **restrizioni**, cioè di funzioni il cui dominio viene tagliato in un insieme più piccolo. Questa procedura, che deve comunque essere fatta con cautela, rappresenta uno strumento utile per ottenere funzioni iniettive.

Il **dominio naturale** di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per la quale la funzione rimane definita. Questa definizione è utile perché ci aiuta a discriminare il caso di domini di una particolare restrizione, oppure il dominio "canonico" che si attribuisce alla legge che descrive la funzione.

Riporto soltanto un esempio, che tratteremo immediatamente subito dopo questa doverosa parentesi. La funzione $f(x) = x^2$ ha dominio naturale $\mathbb{R}$, e non è iniettiva né suriettiva, qualora viene scelto come codominio l'insieme $\mathbb{R}$. La funzione

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

tale che $f(x) = x^2$ è invece iniettiva e suriettiva e, come vedremo tra un attimo, è invertibile.

Definizione 10

Diciamo che una funzione è invertibile (o bigettiva, o biettiva, o è una biezione) se è iniettiva e suriettiva.

Teorema 1

Una funzione strettamente crescente con codominio la sua immagine è biettiva, e quindi invertibile.

Per un'idea della dimostrazione, fate riferimento all'esempio 4.