

Queste schede sono state ideate per il ripasso e il potenziamento di alcuni concetti. Non sono dedicate allo studio primario, in quanto molte informazioni sono state omesse. Evidenzio in *corsivo* le frasi importanti, mentre in **grassetto** le parole importanti o chiave. Gli esercizi, sono sempre sottolineati. Provate a svolgere gli esercizi in autonomia, e confermare il ragionamento con le soluzioni, quando presenti.

Buon lavoro!

Francesco Parisio

I sistemi lineari

Un sistema lineare è un sistema di equazioni lineari, cioè di equazioni dove l'esponente alle incognite è al più 1 o 0. Risolverne uno, vuol dire trovare le coppie (nel caso di due incognite), le triple (nel caso di tre incognite), o in generale, le *n-uple* di numeri che risolvono **tutte** le equazioni del sistema contemporaneamente. Qualche esempio:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 - y = 0 \\ 2y + \sqrt{3}x = 2 \end{cases}$$

Dire per quale motivo i seguenti sistemi **non** sono lineari. Trovate le due soluzioni dell'ultimo sistema. Verificate le risposte date, disegnando i grafici su Geogebra o Desmos, e osservare che non possono essercene altre.

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -x^2 + 9 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x \end{cases}$$

Risoluzione. Nessuno dei sistemi è lineare perché gli esponenti delle incognite x e y non sono solo 1 o 0. Eseguendo una semplice sostituzione, il terzo sistema si riduce all'equazione $x = y = \sqrt{x}$. Le x per le quali x è uguale alla sua radice sono soltanto 0 e 1. Dunque, si ottengono le soluzioni (0, 0) e (1, 1). Verificate quanto detto tramite l'uso di un calcolatore grafico.

Il determinante e la risoluzione di un sistema lineare

Il **determinante** si definisce a partire da una **tabella di numeri** (anche detta matrice) che sia quadrata. Nel caso 2x2, per una tabella generica di numeri $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il suo determinante è

$$\boxed{\det(A) = ad - bc}.$$

I casi 3x3, 4x4... etc. non sono oggetto di studio per gli studenti della seconda superiore.

Ad ogni sistema lineare è possibile associare un determinante utilizzando la tabella dei coefficienti di x e y delle due equazioni lineari. Ci fornisce importanti informazioni circa il numero di soluzioni del sistema. Per calcolarlo, è *obbligatorio* riportare il sistema alla forma

$$\boxed{\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}}$$

e si applica la formula del determinante alla tabella $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Come si nota, i termini noti (e e f) di ciascuna equazione lineare non influiscono sul determinante!

In termini geometrici, il determinante fornisce informazioni circa la *pendenza* di ciascuna retta (o equazione lineare).

Quando il **determinante** è **non nullo**, il sistema ammette una unica soluzione, cioè la pendenza delle rette corrispondenti alle equazioni lineari è diversa, e quindi le rette si intersecano in un solo punto.

Se il determinante è **nullo**, sappiamo solo che la pendenza delle due rette è uguale. Dunque non si può dire niente a priori: si possono avere infinite soluzioni, oppure nessuna. In termini più geometrici, le due rette possono essere *coincidenti* (i punti in comune sono infiniti e sono la retta stessa) oppure parallele non *coincidenti* (dunque nessuna soluzione). Per distinguere i casi, facciamo due esempi.

Cercare i criteri di equivalenza per le equazioni. Cosa vuol dire che due equazioni sono equivalenti? Costruisci tre equazioni equivalenti a $3x+y=2$.

Infinite soluzioni

Le rette sono coincidenti, cioè le equazioni nel sistema sono *equivalenti*. Per esempio:

$$\begin{cases} 2x+y=\frac{1}{2} \\ 4x+2y=1 \end{cases}$$

Nessuna soluzione

Le due rette sono necessariamente parallele, con termini noti distinti, *a meno di multipli*. Due esempi:

$$1. \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \text{ oppure } 2. \begin{cases} 3x+y=9 \\ x+\frac{1}{3}y=4 \end{cases}$$

L'espressione "a meno di multipli" significa che due equazioni sono equivalenti, in particolare quando vengono moltiplicate entrambe per uno stesso numero diverso da zero.

Spiegate il motivo per cui il sistema 2. non ha soluzione, cioè verificate che le rette siano parallele ma non abbiano alcuna soluzione in comune.

Risoluzione: Per motivare la risposta, osserviamo subito che moltiplicando per 3 ambo i membri della seconda equazione, si ottiene una retta con i coefficienti identici alla prima, ma con termini noti distinti. Sono parallele (perché?) e siccome hanno coefficiente noto diverso, individuano due rette parallele distinte, cioè non intersecanti.

Studiate i metodi di risoluzione per confronto, sostituzione e riduzione. Applicare tutti e tre i criteri almeno una volta nella risoluzione dei seguenti sistemi lineari.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y+x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+7y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema, con i termini noti entrambi nulli, si dice **omogeneo**.

Il metodo di Cramer

Il metodo di Cramer permette di risolvere i sistemi lineari utilizzando soltanto le formule del determinante. Studiamo un sistema lineare con **determinante non nullo**, cioè tale che le rette rappresentate dalle due equazioni non siano parallele.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Definiamo da qui due tabelle di numeri.

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} b & e \\ d & f \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Allora le soluzioni del sistema sono

$$x = \frac{\det(X)}{\det(S)}, y = \frac{\det(Y)}{\det(S)}.$$

La formula è macchinosa, e il metodo non viene utilizzato spesso, ma risulta utile quando il determinante è semplice da calcolare.

Per quale motivo si richiede che il determinante del sistema ($\det(S)$) sia diverso da zero?

Calcolare le soluzioni dei sistemi lineari precedenti utilizzando il metodo di Cramer. Quando non è possibile, giustificarlo opportunamente.

I sistemi non lineari e sistemi di disequazioni

Non esistono metodi generali per risolvere qualsiasi sistema di equazioni non lineari. In generale, questo vuol dire calcolare i punti di intersezione di due luoghi geometrici più o meno complessi. In generale, si deve procedere così.

- i. Si calcolano dapprima le **condizioni di esistenza**, cioè tutti i punti per cui le espressioni all'interno delle equazioni sono ben definite (la radice quadrata, per esempio, non è definita per gli argomenti strettamente negativi).
- ii. Si procede calcolando le soluzioni di tutte le equazioni, tenendo conto delle condizioni di esistenza appena imposte.
- iii. Le soluzioni in comune si trovano *intersecando* gli insiemi di soluzioni fra loro. In termini più pratici, si prendono le sole soluzioni che sono in comune a tutte le equazioni.

Per quanto riguarda i sistemi di disequazioni, il procedimento non cambia affatto. Provate a trovare le soluzioni del seguente sistema di equazioni, aiutandovi con il vostro disegno. La prima è l'equazione della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + x = 1 \end{cases}$$

Risoluzione: con l'aiuto del disegno, si vede subito che i due punti di intersezione tra i due luoghi geometrici sono (0, 1) e (1, 0).

Problemi con sistemi lineari

Risolvere i problemi con sistemi lineari richiede applicare la teoria e il ragionamento necessario a tradurre il problema in termini matematici. Nei problemi più pratici, è necessario assegnare ad una variabile x la lunghezza di un certo lato, piuttosto che la misura di un perimetro. Altre volte, è molto più importante esprimere delle grandezze *derivate* in termini di quelle primarie. Svolgiamo insieme il seguente problema, a titolo di esempio.

Esempio: *La base di un rettangolo è $\frac{3}{8}$ del suo perimetro, mentre $\frac{4}{7}$ della base superano di 3cm $\frac{3}{2}$ dell'altezza. Determinate la lunghezza dei lati del rettangolo.*

Dovrebbe essere immediato individuare come variabili principali la **base** e l'**altezza** del rettangolo. Assegnategli una lettera, io ho scelto rispettivamente **b** e **h** . C'è anche un'altra variabile **perimetro** p , che però, essendo derivata direttamente da b e h , individuerò direttamente con $p = 2(h + b)$.

Allora traduciamo la prima frase: *base di un rettangolo è $\frac{3}{8}$ del suo perimetro*, dunque

$$b = \frac{3}{8} p = \frac{3}{8} \cdot 2(b+h).$$

La seconda frase, *$\frac{4}{7}$ della base superano di 3cm $\frac{3}{2}$ dell'altezza*, vuol dire che

$$\frac{4}{7} b = \frac{3}{2} h + 3.$$

Le due condizioni devono essere vere contemporaneamente, dunque bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} b = \frac{3}{8} \cdot 2(b+h) \\ \frac{4}{7} b = \frac{3}{2} h + 3 \end{cases}$$

Con qualche passaggio algebrico, si riporta il sistema alla sua forma normale, in modo da calcolarne il determinante associato: occhio ai segni! Risolvete il sistema in autonomia. [42cm, 14cm]

Risolvete i seguenti problemi dal carattere geometrico.

1. Calcola la lunghezza di due segmenti, sapendo che la somma della loro lunghezza è 19m e la loro differenza è 5m.
2. Il perimetro del rettangolo R è di 80cm. La base supera l'altezza di 10cm. Trovare le misure dei lati del rettangolo, e calcolare l'area di R.
3. Considerate un parallelepipedo. I perimetri dei rettangoli individuati da ciascuna faccia sono 26cm, 24cm e 18cm. Determinate il volume del parallelepipedo. (Aiutatevi con un disegno!)

Risolvere i seguenti problemi.

1. Determina una frazione, sapendo che il denominatore è il doppio del numeratore aumentato di 1 e che, diminuendo di 1 il numeratore e aumentando di 1 il denominatore, si ottiene la frazione $\frac{1}{3}$.
2. Un automobilista percorre 615km in due giorni. Sapendo che il tragitto del primo giorno è doppio di quello del secondo giorno, trova quanti chilometri ha percorso ogni giorno.

Risolvete i seguenti problemi, avendo cura di rispettare il limite di tempo.

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

1 ora

PROVA A

- 1** Indica senza risolverli quale dei seguenti sistemi è determinato, quale è indeterminato e quale è impossibile. Determina la soluzione quando è determinato.

a.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 8x - 12y = -\frac{2}{3} \\ -2x + 3y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} -5x - y = 10 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{10}y = 0 \end{cases}$$

- 2** Risolvi il seguente sistema con due metodi diversi.

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{3} - 2 = x \\ \frac{1}{6}x + \frac{y-1}{3} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- 3** Risolvi il seguente sistema.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y} = \frac{7x+1}{2xy+2y} \\ \frac{y+6}{3} - x = 2 \end{cases}$$

- 4** Trova due numeri, sapendo che il triplo del primo sommato alla metà del secondo è uguale a 60, mentre la differenza tra il doppio del secondo e i $\frac{3}{4}$ del primo è 36.

- 5** In un trapezio l'area è 540 cm^2 e l'altezza 15 cm. Trova le misure delle due basi sapendo che la somma di $\frac{1}{3}$ della base maggiore con i $\frac{3}{5}$ di quella minore è 32 cm.

- 6** Nel 2014 il record mondiale del salto con l'asta maschile ha superato di 2 cm il record precedente, imbattuto dal 1994. Un record ancora precedente a quello del 1994 era stato stabilito dallo stesso atleta nel 1984, ed era di 20 cm inferiore a quello del '94. Sapendo che la media fra i tre record è 6,08 m, qual è il record del 2014?



Risolvere i seguenti sistemi, facendo particolare attenzione alle condizioni di esistenza.

10
$$\begin{cases} \frac{x-y}{4} + \frac{y+2}{7} = 2y-8 \\ 3y+4 = \frac{8x-3y}{3} + \frac{9y-5x}{4} \end{cases} \quad [(9; 5)]$$

11
$$\begin{cases} 5x-y-13=0 \\ \frac{x-1}{3} - \frac{y+3}{2} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad [(2; -3)]$$

12
$$\begin{cases} \frac{3x-3y}{2} - 2x + \frac{y}{3} = \frac{5}{3} \\ \frac{x+y}{2} + \frac{y-2x}{3} = y + \frac{1}{9} \end{cases} \quad [(\frac{4}{3}; -2)]$$

13
$$\begin{cases} (3x-2y-6) - \frac{2x-3y-3}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}(y-x) - (x-1)^2 = (1-x)(1+x) \end{cases} \quad [(\frac{5}{2}; -2)]$$

14
$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) - x(x+2) + 6y = 1 \\ (y-2)(y+3) + 5 = y(y-3) + 2(x-y) + \frac{1}{4} \end{cases} \quad [\text{indeterminato}]$$

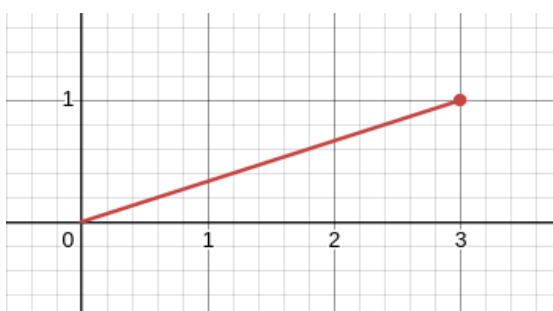
20
$$\begin{cases} \frac{x-4}{2x+1} > 0 \\ \frac{1}{2x^2+x} < 0 \\ 2x^2-x-3 < 0 \end{cases} \quad [\forall x \in \mathbb{R}]$$

21
$$\begin{cases} \frac{x^2}{9-x^2} \geq 0 \\ \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2} \leq \frac{4}{x^2-4} \end{cases} \quad [-3 < x < -2 \vee 1 \leq x < 2]$$

22
$$\begin{cases} \frac{x^2-7x+13}{x-7} < 0 \\ \frac{x+1}{x^4+2} \geq 0 \end{cases} \quad [-1 \leq x < 7]$$

Il piano cartesiano

Utilizziamo subito una applicazione del teorema di Pitagora per definire la distanza tra due punti nel piano cartesiano. Esaminiamo dapprima il caso della distanza di un punto dall'origine.

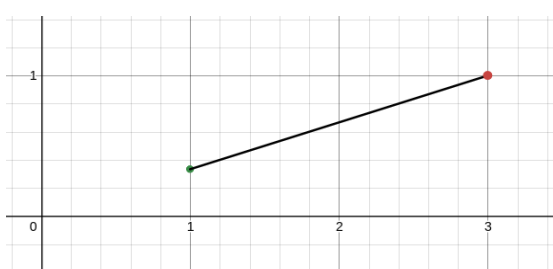


In questo caso, trovare la distanza dal centro $(0, 0)$ fino al punto $(3, 1)$ equivale a trovare la lunghezza del segmento rosso. Per Pitagora, abbiamo

$$|A| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

In generale, dato un punto $A = (x, y)$, la sua distanza dal centro è

$$\text{dist}(A) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



La distanza tra due punti è molto simile. Prendiamo due punti $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. Allora, immaginiamo di disegnare un triangolo rettangolo, con ipotenusa il segmento che li collega. I cateti hanno misura

$$|x_b - x_a| \text{ e } |y_b - y_a|.$$

Il valore assoluto è necessario, perché in generale non sappiamo se il punto B abbia tutte le coordinate maggiori di A (nel caso in cui non fosse così, la distanza sarebbe negativa, e ciò non è possibile!).

Per Pitagora, abbiamo che la distanza tra A e B, che è la lunghezza dell'ipotenusa, è

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Ho rimosso il valore assoluto, perché abbiamo elevato tutto al quadrato.

Siano $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ due punti sul piano cartesiano qualsiasi. Il **punto medio del segmento per A e B** è il punto

$$M_{A,B} = \left(\frac{x_b - x_a}{2}, \frac{y_b - y_a}{2} \right).$$

La prima coordinata del punto $M_{A,B}$ è detta “semisomma delle ascisse”, mentre la seconda viene detta “semisomma delle ordinate”.

La retta

La retta è il luogo geometrico di una equazione lineare, cioè tutti i punti (x, y) che soddisfano l'equazione lineare $y = mx + q$. *Un punto appartiene alla retta se le sue coordinate soddisfano l'equazione associata!* Esaminiamo dapprima alcuni esempi semplici, per comprendere meglio l'equazione generale.

- La retta corrispondente all'equazione $y = x$ comprende tutti i punti (x, y) con ascisse e ordinate uguali. Questa retta viene chiamata **bisettrice** del primo e terzo quadrante.

- La retta $y=mx$ contiene tutti i punti (x, y) , con $y=mx$. Il coefficiente m si chiama **coefficiente angolare**, e dà informazioni circa l'angolo compreso tra l'asse x e la retta. La retta precedente ha coefficiente angolare 1. Cosa succede quando il coefficiente angolare è -1 ? Verificare la risposta, visualizzando la retta su Desmos o Geogebra.
- La retta $y=mx+q$ è identica alla retta precedente, alzata o abbassata di un certo valore q rispetto all'asse x .

Esistono alcuni casi particolari.

- La retta $y=0$ è la retta con coefficiente angolare nullo e con quota nulla rispetto all'asse x . Individua tutti i punti $(x, 0)$, cioè l'asse x del piano cartesiano. La retta $y=k$, con k un qualsiasi numero reale, è una retta parallela all'asse x .
- La retta $x=0$ individua tutti i punti con ascisse nulla, dunque l'asse y . La retta $x=k$, con k qualsiasi numero reale, è una retta parallela all'asse y . Questi tipi di retta vengono detti **improprie**.

Prima di continuare, inserisci delle equazioni lineari nel calcolatore grafico (come Desmos oppure Geogebra), ciascuna di tipo diverso, e osserva il comportamento delle rette al variare dei parametri q e m .

Retta passante per due punti

Prendiamo due punti $A=(x_a, y_a)$ e $B=(x_b, y_b)$. Il coefficiente della retta passante per A e B è

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}.$$

Il numeratore Δy è chiamato anche **alzata**, mentre Δx è detto anche **pedata**. Abbiamo dunque determinato il termine m dell'equazione, ma non si sa niente sul termine q . Sfruttiamo l'ipotesi che la retta contiene i due punti. Imponiamo il passaggio per uno dei due punti, per esempio A . Quindi sostituiamo le coordinate (x_a, y_a) di A nell'equazione $y=mx+q$, assicurandoci di mettere il giusto coefficiente m appena calcolato! Allora otteniamo $q=y_a-mx_a$, che è un numero, poiché tutte le variabili sono state determinate. L'equazione della retta si trova sostituendo i giusti m e q .

Esempio: Troviamo la retta passante per i punti $(1, 1)$ e $(3, 2)$. Determiniamo subito il coefficiente angolare. $M = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$. A questo punto, scegliamo un punto a caso (il primo, per facilità), e

calcoliamo q . Si ottiene $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q$, cioè $q = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. L'equazione della retta è finalmente $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Risolvete i seguenti problemi

1. Trovate l'equazione della retta passante per i punti $A = (3, 1)$ e $B = (6, -5)$.
2. Dite per quali valori di x la retta passante per i punti $(1, 2)$, $(6, 4)$ è positiva. Per quale punto la retta è uguale a zero? Per quale punto la retta vale 100? Quanto vale la retta quando $x=100$?

3. Considerate un rombo dai vertici ABCD. Sapete che $A = (1, 0)$, che $B = (5, 3)$ e che il punto di incontro delle diagonali $M = (1, 3)$. Determinate le coordinate dei punti C e D, e trovate l'area e il perimetro del poligono.
4. Disegnate il grafico della retta passante per il punto $(2, 1)$ e avente coefficiente angolare 4. Quale è la sua intercetta? Per quali valori di x la retta risulta strettamente positiva?
5. Trovate il perimetro e l'area del triangolo individuato dalle rette $y+2=0$, $3x-4y-11=0$, $3x+4y-19=0$. Verificare che è isoscele, calcolando la lunghezza dei lati.

Rette parallele e perpendicolari

Due rette si dicono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare, mentre si dice che sono **perpendicolari** se il prodotto dei coefficienti angolari è -1 . In formule, prese due rette $y=mx+q$, $y=Mx+q$, le rette sono perpendicolari se e solo se $m=\frac{-1}{M}$.

Su un calcolatore grafico, verificare che due rette con coefficienti angolari uguali sono parallele, e che due rette con coefficienti uno l'antireciproco dell'altro sono incidenti e perpendicolari. Fare due esempi di due rette parallele e due perpendicolari.

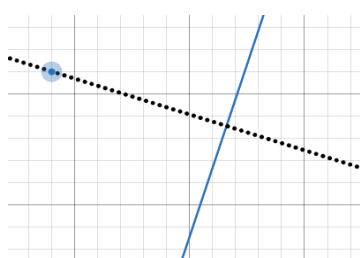
Risolvete i seguenti esercizi.

1. Trovate due rette perpendicolari a $y = 1$. A cosa sono parallele?
2. Trovate una retta s parallela a $t: y=2x$ che passi per il punto $(1, 5)$. Trovare poi una retta h perpendicolare a s . Calcolate i punti di intersezione $t \cap h$ e $s \cap h$. Quanto distano? (Il simbolo $X \cap Y$ significa "intersezione").
3. Dite se il punto $A = (1, 9)$ appartiene alla retta $r: y=2x+7$. Trovate una retta perpendicolare a r e passante per A .
4. Trovate una retta r perpendicolare a $s: 13y=7x+1$. Trovate il punto di intersezione tra r e s , e trovate la parallela all'asse x passante per tale punto.

Distanza di un punto da una retta

Un problema noto in geometria è trovare la distanza (minima) di un punto da una retta. Il caso banale è quando il punto appartiene proprio alla retta: in quel caso la distanza è nulla. Esaminiamo ora il problema per un punto generico $A=(x_a, y_a)$, e una retta $s: y=\alpha x+\beta$.

In aiuto, ho creato un grafico interattivo. Digitate sul browser questo indirizzo: <https://www.desmos.com/calculator/scw4cimtjm>.



Si vede subito che la lunghezza dei segmenti che collegano A ad un punto qualsiasi della retta varia, e ciò non fornisce una buona definizione; tra tutti i segmenti, dobbiamo trovare quello con lunghezza minore, in modo da poter associare ad un punto una sola distanza. Attenzione: *questo concetto richiama quello di funzione, ricordatelo per il prossimo anno, sarà molto importante*. Consideriamo quindi la retta ausiliaria $t=Mx+Q$ (nera, tratteggiata,

nel grafico) perpendicolare alla retta s e passante per il punto A . Chiamiamo il punto di intersezione $B=s\cap t$. Il segmento AB è il segmento con distanza minore tra il punto A e la retta.

Una domanda per voi. Quali sono i valori di M e di Q della retta t ?

Risoluzione: Il valore di M è certamente l'antireciproco di m , cioè $M=\frac{-1}{m}$. Il valore di Q si ottiene imponendo il passaggio di A per la retta s , cioè, $Q=y_a-Mx_a$. Ecco trovata la retta cercata.

Una formula che si può imparare è la seguente: per un punto $A=(x_a, y_a)$ e una retta r di equazione $ax+by+c=0$,

$$\text{dist}(A, r) = \frac{|ax_a + by_a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La formula è certamente più semplice da applicare, ma non dimenticate che le formule si dimenticano, mentre il ragionamento, una volta imparato, non si scorda più! Vi consiglio di esercitarvi facendo passaggi più laboriosi.

Risolvete i seguenti problemi di ricapitolazione. Trovate alcuni suggerimenti nella pagina successiva. Alcuni problemi sono particolarmente lunghi e complessi, ma non difficili! Scomponete il problema in problemi più piccoli, e non scoraggiatevi.

1. Scrivete l'equazione di una parallela alla retta $y=x$ che passi per il punto $A=(3,4)$. Trovate la distanza di tale retta dall'origine.
2. Scrivete l'equazione della retta t passante per $P=(-1,1)$ e parallela al segmento di estremi $R=(3,2)$ e $Q=(-3,4)$. Disegnate la retta.
3. Trovate l'equazione della retta perpendicolare al segmento AB , $A=(-1,-1)$, $B=(1,2)$ nel suo punto medio. Tale retta si chiama **asse del segmento AB**.
4. Una fabbrica produce bicchieri, e vuole scegliere un nuovo tipo di produzione. (A) produzione a mano, con costi fissi di 500€ e costi variabili di 1€ al pezzo; (B) produzione a macchina, con costi fissi di 2000€ e costi variabili di 0,50€ al pezzo. Stabilite la scelta più conveniente, in base alla quantità di bicchieri prodotta. [meno di 3000: (A); esattamente 3000: indifferente, più di 3000: (B)]
5. Per una retta di equazione $2x-3y+2=0$, e per un punto $A=(2,3)$, scrivete l'equazione di una retta parallela e passante per A , e una perpendicolare e passante per A . Trovate la distanza di A dalla retta.
6. Aiutandovi con un disegno di massima, trovate per quali valori di x il grafico della parabola $y=x^2+x-1$ sta al di sopra della retta $y=2x+1$. Verificate che la parabola ammetta due soluzioni x_1 e x_2 . Chiamati A, B i due punti di intersezione tra la parabola e la retta, trovate il perimetro del poligono delimitato dai punti $(x_1,0)$, $(x_2,0)$, A, B .
7. Dite quante soluzioni ha la parabola di equazione $y=(x-4)(x+1)$ e dite se la parabola di equazione $y=(x-4)(x+1)+1$ si può scomporre come prodotto di binomi di primo grado e costanti reali.

8. Considerate H l'iperbole di equazione $H: y = \frac{1}{x+2}$. Dite se ammette intersezioni con la parabola $P: y = x^2 + 2x + 1$. Scegliere un punto di intersezione A , e calcolare la lunghezza del segmento che collega $(0,0)$ a A .
9. Cercate due numeri x, y reali tali che il loro prodotto faccia 1, e tali che il reciproco somma del quadrato di x e di y faccia 2.
10. Esercizio teorico (**Retta tangente alla parabola**). Considerate una parabola P di equazione generica $y = ax^2 + bx + c$ e una retta R di equazione $y = dx + e$. Supponiamo che il punto $A = (x_a, y_a)$. Qual è la condizione necessaria per far sì che la retta R sia tangente alla parabola P nel punto A ?

Risoluzione dell'esercizio 10.

Siccome il punto A appartiene alla parabola, $y_a = ax_a^2 + bx_a + c$. Spezziamo il problema in due parti.

- i. Il punto A deve appartenere anche alla retta, dunque $y_a = dx_a + e$. La prima condizione si impone in questa maniera:

$$y_a = ax_a^2 + bx_a + c = dx_a + e$$

Notiamo subito che di tutte le variabili, tranne che di d e e , conosciamo i dati. Questo vuol dire che se fissiamo un'altra condizione, otteniamo la retta cercata.

- ii. Adesso vogliamo che l'intersezione tra la retta e la parabola sia un solo punto. L'intersezione tra la retta e la parabola fornisce una equazione di secondo grado, le cui soluzioni sono le ascisse dei punti cercati. Svolgiamo il calcolo insieme:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$$

per confronto, si ha che

$$ax^2 + bx + c = dx + e, \text{ cioè}$$

$$ax^2 + (b-d)x + (c-e) = 0.$$

Il discriminante di questa parabola va imposto uguale a zero, perché deve esserci un solo punto di intersezione. Quindi,

$$(b-d)^2 - 4a(c-e) = 0.$$

Possiamo mettere tutto insieme, in un sistema non lineare nelle incognite d ed e .

$$\begin{cases} dx_a + e = y_a \\ (b-d)^2 - 4a(c-e) = 0 \end{cases}$$

Il sistema non è banale da risolvere, e di solito si utilizzano queste condizioni applicate agli esercizi particolari. Prendiamo un caso semplice per esempio. Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 1$. Scegliamo il punto di tangenza, ad esempio $(2, 5)$. Verificate che questo punto appartenga alla parabola. Impostiamo il sistema. Otteniamo:

$$\begin{cases} 2d+e=5 \\ d^2+4(1-e)=0 \end{cases}$$

Solo i valori $e=5$ e $d=4$ risolvono il sistema. Dunque si ha che la retta di equazione $y=4x-3$ è tangente al grafico della parabola scelta nel punto $(2,5)$.

Alcuni suggerimenti per gli esercizi precedenti.

(4) Chiamate y il prezzo complessivo, e x il numero di bicchieri prodotti. Il prezzo complessivo per una certa lavorazione è il costo di produzione di ciascun bicchiere più il prezzo fisso per la lavorazione.

(6) Notiamo che la parabola è rivolta verso l'alto, poiché il coefficiente del termine x^2 è positivo. Fornisco due idee, essenzialmente uguali. a) Trovate l'intersezione tra la retta e la parabola, cioè svolgete il sistema che interseca parabola e retta. Poiché la parabola è rivolta verso l'alto, le soluzioni sono esterne, la parabola sta al di sopra della retta nei punti esterni alle soluzioni. b) Imponete la parabola maggiore della retta. Gli zeri dell'espressione forniscono i punti di intersezione tra parabola e retta, e le soluzioni dell'equazione sono esterne, in quanto la parabola è rivolta verso l'alto. Allora trovate le soluzioni della parabola, e con un disegno di massima, disegnate il poligono e trovatene il perimetro, trovando la lunghezza di ogni lato (segmento).

(7) La parabola $y=(x-4)(x+1)+1$ si può scomporre in prodotto di binomi di primo grado se e solo se ammette soluzioni. In questo caso ne ammette due, poiché il discriminante è maggiore di zero.